

Globale Eigenschwingungen der Erde

Walter Zürn und Rudolf Widmer-Schnidrig

Geowissenschaftliches Gemeinschaftsobservatorium der Universitäten Karlsruhe/Stuttgart (BFO)

Heubach 206, D-77709 Wolfach

e-mail: walter.zuern@gpi.uni-karlsruhe.de, widmer@geophys.uni-stuttgart.de

Erbetenes Manuskript für *Physikalische Blätter*, 12. Juli, 2002

1 EINLEITUNG

Die feste Erde führt eine ganze Reihe von erzwungenen (quasi-) periodischen Schwingungen aus, z. B. die allgemeine Präzession der Erdachse (Periode 25765 Jahre), die jährliche Polschwankung und die Gezeiten der festen Erde (Periodizitäten im Sonne-Erde-Mond-System, größte Amplituden halb- und ganztägig). Daneben gibt es mehrere Arten von freien Schwingungen, die angeregt und beobachtet werden können: elastische und Kreisel-Eigenschwingungen. Die beobachteten Frequenzen, Gütefaktoren, Amplituden und Phasen dieser freien Schwingungen werden dazu verwendet, unsere Kenntnisse über die elastischen Eigenschaften des Erdinneren und die Anregungsmechanismen zu verbessern. Theoretisch vorhergesagt wurden zusätzliche freie Schwingungen: Oszillationen im flüssigen äusseren Erdkern und Translationsschwingungen des festen inneren Kerns (Slichter-Triplett), deren Beobachtung bisher nicht bzw. nur sehr umstritten erfolgt ist.

2 ELASTISCHE EIGENSCHWINGUNGEN

Nach dem extrem starken Erdbeben am 22. Mai 1960 in Chile wurden Eigenschwingungen (Moden) der Erde zum ersten Mal mit Gravimetern, Extensometern und langperiodischen Seismographen beobachtet. Am 28. März 1964 regte ein weiteres solches Beben in Alaska die Schwingungen wieder meßbar an und diese beiden Ereignisse markieren den Beginn einer neuen Forschungsrichtung der Seismologie und öffneten ein neues Fenster ins tiefe Erdinnere: die terrestrische Spektroskopie [1, 2, 3]. Die beobachteten Frequenzen vieler Moden lagen gleich sehr dicht bei denen, die für Erdmodelle berechnet wurden, die ihrerseits aus den Laufzeiten seismischer Wellen ermittelt worden waren. Abb. 1 zeigt eine Registrierung des stärksten je digital registrierten Tiefherdbebens (Nordbolivien, 9. Juni 1994) und Abb. 2 das Fourierspektrum eines ähnlich starken Bebens mit deutlich erkennbaren Spektrallinien der Erde.

Die Verschiebungsfelder und komplexen Frequenzen dieser „seismischen“ Moden werden durch die Geometrie der Grenzflächen und die Verteilung der elastischen Parameter (bei Abwesenheit von Anisotropie Schermodul μ und Kompressionsmodul K) und der Dichte ρ in der Erde vollständig definiert. Rückstellkräfte sind sowohl die elastischen Spannungen, die durch Deformation aus dem Gleichgewichtszustand entstehen, als auch die Gravitationswirkung der verschobenen Massen (Selbstgravitation), wobei letztere nur bei den tieffrequentesten Moden eine grössere Rolle spielt.

Global gesehen weist die Erde eine sehr hohe Symmetrie auf. In erster Näherung kann man von einer radialsymmetrischen

Verteilung aller physikalischen Eigenschaften und kugelförmigen Grenzflächen ausgehen. Wenn man etwas genauer hinschaut, wird diese Symmetrie gebrochen und die nächste Näherung ist die Axialsymmetrie um die Verbindungslinie zwischen den Polen definiert durch die mittlere Rotationsachse (Abplattung 1/298.26 an der Erdoberfläche). In Wirklichkeit gibt es erhebliche Abweichungen von diesen einfachen Symmetrien, wie man bei Betrachtung der Erdoberfläche auf einem Globus leicht sehen kann.

Bei Radialsymmetrie und ohne Rotation lassen sich die Eigenschwingungen in zwei große Gruppen einteilen: toroidale T -Moden und sphäroideale S -Moden. Die Eigenfunktionen lassen sich (in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ) jeweils in einen Oberflächenanteil und einen Radialanteil separieren. Für toroidale Moden, die nur Verschiebungen in tangentialer Richtung haben ($u_r = 0$):

$$u_\theta = \frac{{}_n W_\ell(r)}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} [P_\ell^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i \cdot \omega({}_n T_\ell^m) \cdot t} \quad (1)$$

$$u_\phi = -{}_n W_\ell(r) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [P_\ell^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i \cdot \omega({}_n T_\ell^m) \cdot t} \quad (2)$$

wobei u die Verschiebung, $\omega({}_n T_\ell^m)$ die Eigenkreisfrequenz, P_ℓ^m zugeordnete Legendre-Polynome, t die Zeit und $i = \sqrt{-1}$ bedeuten. n, ℓ und m ($-\ell \leq m \leq \ell$) sind ganze Zahlen entsprechend den Quantenzahlen bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom. Zur Kurzbeschreibung hat sich die Nomenklatur ${}_n T_\ell^m$ durchgesetzt. Für sphäroideale Moden (${}_n S_\ell^m$) sind i. a. alle drei Verschiebungskomponenten von null verschieden:

$$u_r = {}_n U_\ell(r) \cdot P_\ell^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi} \cdot e^{-i \cdot \omega({}_n S_\ell^m) \cdot t} \quad (3)$$

$$u_\theta = {}_n V_\ell(r) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [P_\ell^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i \cdot \omega({}_n S_\ell^m) \cdot t} \quad (4)$$

$$u_\phi = \frac{{}_n V_\ell(r)}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} [P_\ell^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}] \cdot e^{-i \cdot \omega({}_n S_\ell^m) \cdot t} \quad (5)$$

Spezialfälle der sphäroidalen Moden sind die radialen Moden (${}_n S_0$), bei denen nur u_r von null verschieden ist. Die Funktionen $U(r), V(r)$ und $W(r)$ sind die radialen Eigenfunktionen, deren Knotenanzahl entlang des Radius r mit wachsendem n zunimmt und die im Gegensatz zu den Oberflächenfunktionen von dem genauen Aufbau der Erde abhängen. Jede Mode besitzt drei Arten von Knotenflächen: n definiert die Anzahl der Knotenkugeln ($r = const.$) im Erdinnern, $|m|$ gibt die Anzahl der Knotenebenen durch den Erdmittelpunkt (Meridianebenen $\phi = const.$) an und $\ell - |m|$ definiert die Anzahl der Knotenkegel ($\theta = const.$) mit Spitze im Erdmittelpunkt. $n = 0$ definiert die sogenannten Fundamentalmoden, Moden mit $n > 0$ sind die Obertöne. Die Abb. 3 zeigt Schnappschüsse des theoretischen Verschiebungsfeldes an der Erdoberfläche (in Mollweide-Projektion) für ausgewählte Moden nach

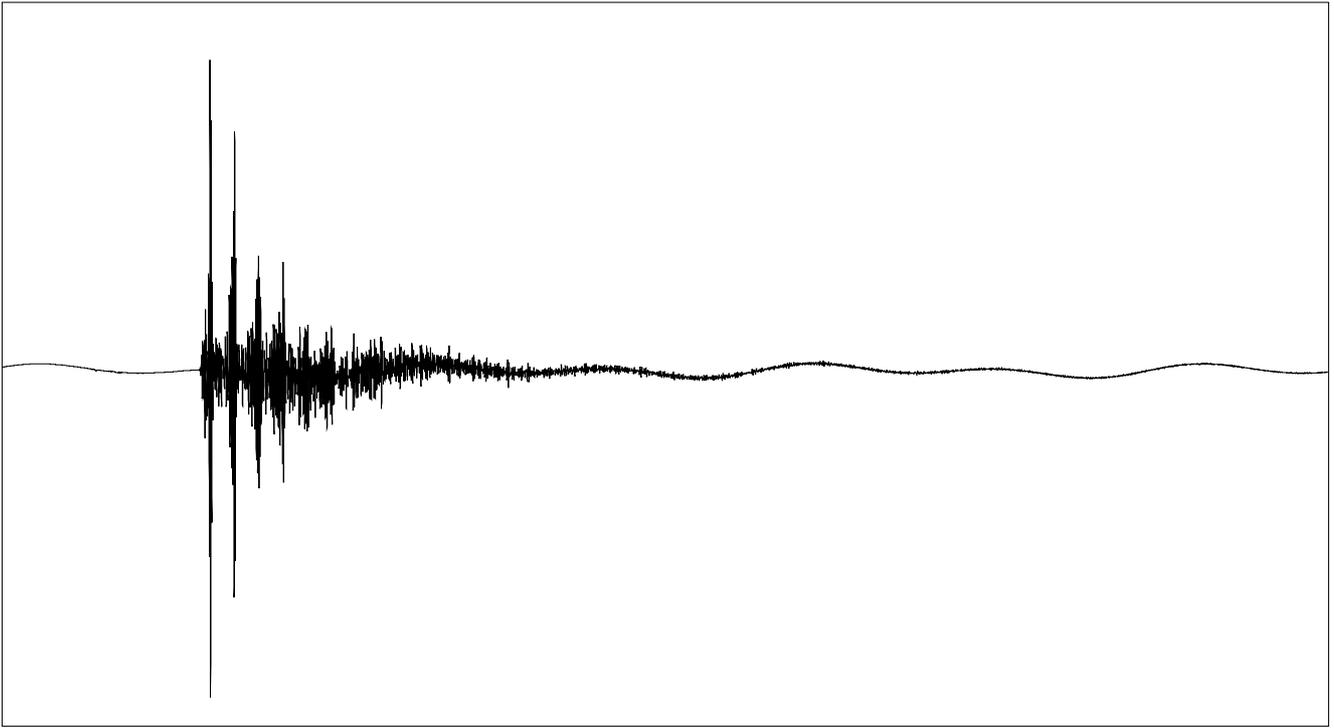


Figure 1. Registrierung der vertikalen Bodengeschwindigkeit mit einem STS-1 Breitbandseismometer am BFO (Observatorium Schiltach, $48.33^\circ N$, $8.33^\circ E$), die vom Tiefherdbeben in N-Bolivien am 9. Juni 1994 hervorgerufen wurde. Gesamtdauer der Zeitreihe 84 Stunden, grösste Amplitude ca. $25 \mu m/s$ bei $3.3 mHz$. Das auffälligste Signal sind die Rayleighwellenzüge, die im 1.5-Stundenrhythmus aus wechselnden Richtungen auf dem Großkreis mit abnehmender Amplitude an der Station ankommen. Ein voller Umlauf um die Erde dauert etwa 3 Stunden. Die schwache 12-Stunden-Schwingung im Hintergrund sind die elektronisch stark abgeschwächten Erdgezeiten.

bestimmten Erdbeben. Die Abb. 4 zeigt radiale Verteilungen der Energiedichten für bestimmte Moden. Eine Folge der Kugelsymmetrie ist, daß die Frequenzen der Moden nicht von m abhängen können (Entartung), da die Wahl des Koordinatensystems beliebig ist. Die Menge der $(2\ell + 1)$ Einzelmoden (Singletts) wird als Multiplett (m wird weggelassen) bezeichnet.

Die Moden klingen durch anelastische Vorgänge bei der Deformation exponentiell ab und ihre Energie wird in Wärme umgewandelt. Die Gütefaktoren Q entsprechen der Anzahl von Schwingungen, nach denen die Amplitude einer Mode um den Faktor $e^{-\pi}$ abgeklungen ist. Anelastische Dämpfung findet besonders bei Scherdeformation statt, d. h. Moden mit wenig Scheranteil (radiale Moden) besitzen höhere Gütefaktoren als andere. Tabelle 1 enthält die Eigenfrequenzen und Gütefaktoren ausgewählter Moden mit den experimentellen Unsicherheiten aus der Analyse von Spektren wie dem in Abb. 2. Obwohl das Spektrum zu hohen Frequenzen hin zunehmend dicht besetzt ist, ist es trotzdem gelungen durch die simultane Analyse von mehr als 10000 Seismogrammen insgesamt mehr als 1600 Multipletts aufgrund ihres unterschiedlichen Verschiebungsfeldes an der Erdoberfläche zu identifizieren und ihre Frequenzen zu schätzen. Diese Eigenfrequenzen sind zusammen mit den Phasengeschwindigkeiten von seismischen Oberflächenwellen (s. u.) und den Laufzeiten seismischer Raumwellen das Ausgangsmaterial für die Erstellung kugelsymmetrischer Erdmodelle ($K = K(r)$, $\mu = \mu(r)$ und $\rho = \rho(r)$).

Die Mode mit der tiefsten Frequenz ist ${}_o S_2$, im Engl. als „football“-mode bezeichnet, mit einer Periode von 54 Minuten (s. Abb. 3). Sie wird nur von den allerstärksten Erdbeben nachweisbar angeregt. Die toroidale Grundmode ${}_o T_2$ (engl. „twisting“-mode, Abb. 3) hat eine Periode von 44 Minuten und ist bisher nur am Observa-

torium Schiltach mit Extensometern mehrfach eindeutig beobachtet worden. Die gemessene Deformation betrug dabei etwa 10^{-11} . Die einer atmenden Kugel (engl. „breathing“-mode) entsprechende Mode ${}_o S_0$ hat eine Periode von 20 Minuten und bei weitem den höchsten Gütefaktor, da bei dieser Mode der Anteil der Scherdeformation minimal ist (Abb. 4). Sie konnte bis zu einem Monat lang nach sehr starken Beben beobachtet werden und ihre Frequenz ist deshalb extrem genau bekannt (4ppm). Eine homogene Stahlkugel mit demselben Radius wie die Erde hätte für diese Mode eine Periode von 30 Minuten.

Die Fundamentalmoden ($n = 0$) können für $\ell \gg 1$ als konstruktive Interferenz aus, den Planeten in zwei Richtungen von der Quelle umlaufenden, Oberflächenwellen vom Rayleigh (${}_o S_\ell$) oder Love-Typ (${}_o T_\ell$) beschrieben werden. Es gilt dann die Jeans'sche Formel:

$$n\omega_\ell = \frac{c(\omega) \cdot (\ell + \frac{1}{2})}{a} \quad (6)$$

wo c die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwelle und a der Erdradius ist. In Abb. 1 kann man verschiedene Züge dieser wiederkehrenden Oberflächenwellen ausmachen. Mit wachsendem ℓ dringen die Eigenfunktionen dieser Moden immer weniger in die Erde ein und enthalten damit Information aus immer geringer werdenden Tiefen (Abb. 4).

Obertöne kann man sich aus der konstruktiven Interferenz von reverberierenden Raumwellen entstanden gedacht denken. Die Periode der Mode ${}_o S_0$ ist nicht zufällig annähernd gleich der Laufzeit einer Kompressionswelle von der Oberfläche zum Erdmittelpunkt und zurück. Manche dieser Moden (wie z. B. ${}_3 S_{1,8}$, ${}_8 S_{1,13}$, ${}_2 S_{2,18}$, ${}_4 S_4$, Abb. 4) haben Eigenfunktionen, die bis tief in den inneren Erd-

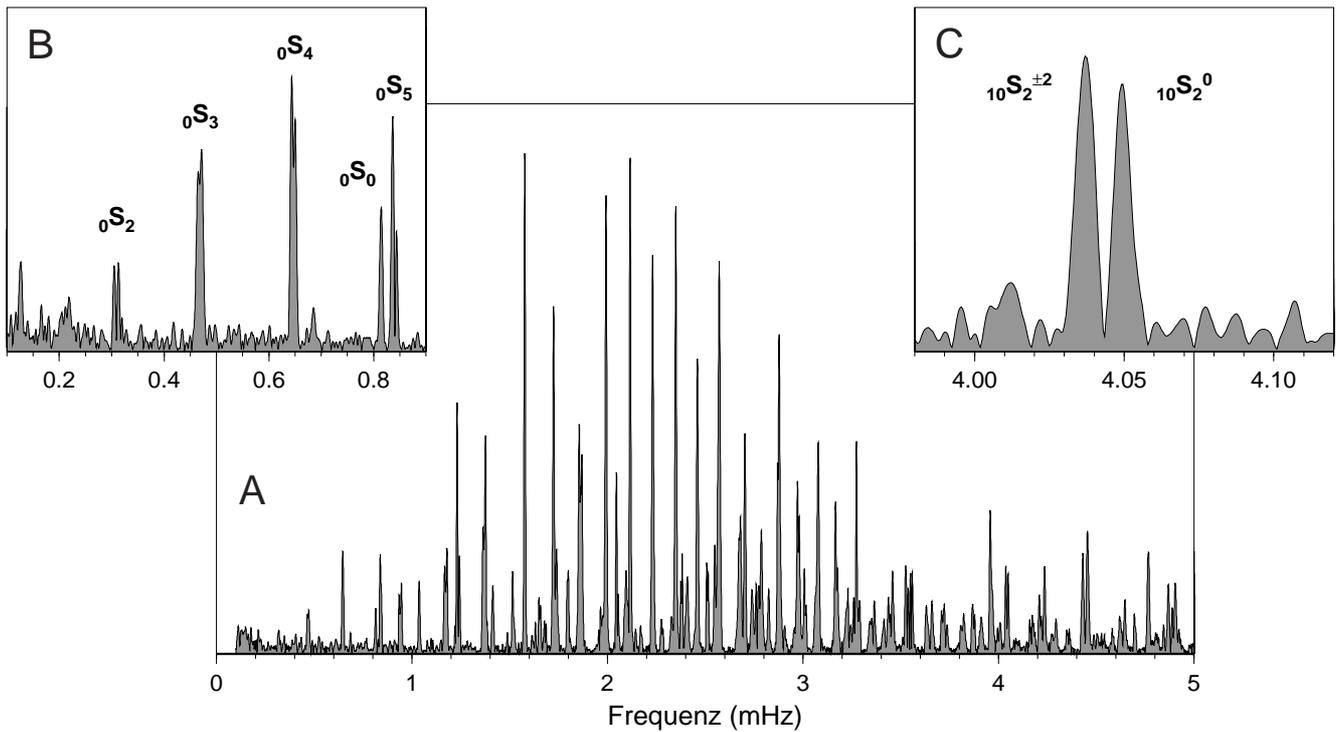


Figure 2. Amplitudenspektrum einer Gravimeterregistrierung (75 Stunden) am BFO des Bebens in den Kurilen am 4. Oktober 1994. Man erkennt die scharfen Spektrallinien der Erde, wobei die Mode ${}_0S_3$ bei 1.58 mHz die grösste spektrale Amplitude hat. Der Amplitudenabfall bei hohen Frequenzen wird dadurch verursacht, daß diese nach 4 Tagen bereits weggedämpft sind. Der Anstieg bei tiefen Frequenzen wird durch die mit ω^2 zunehmende Trägheitsbeschleunigung erzeugt. Im Detailbild links oben erkennt man die durch die Corioliskraft bewirkte Linienaufspaltung bei den drei tiefsten Frequenzen. Im Detailbild rechts oben kann man die anomale Aufspaltung des Multipletts ${}_{10}S_2$ erkennen, die durch Anisotropie im inneren Kern etwa doppelt so groß ist wie sie aufgrund der hydrostatischen Abplattung einer rotierenden Erde erwartet wird.

kern eindringen, was sie sehr wichtig macht für die Ermittlung der Struktur in der Nähe des Erdmittelpunktes.

In dieser Modenmenagerie [1] gibt es ein paar Besonderheiten. Die Singletts ${}_0S_1^{-1}$, ${}_0S_1^0$ und ${}_0S_1^{+1}$ können durch Quellen im Erdinnern nicht angeregt werden, da sie eine Schwerpunktsverschiebung beinhalten. Ebenso wenig können ${}_0T_1^{-1}$, ${}_0T_1^0$ und ${}_0T_1^{+1}$ durch innere Quellen angeregt werden, da der Drehimpulsatz verletzt würde. ${}_1S_1^m$ entspricht dem unbeobachteten Slichter-Triplett mit vorhergesagten Perioden von 4.13, 4.53 und 5.01 Stunden. Diese Schwingung ist im wesentlichen eine Translationsschwingung des inneren Kerns, bei der die Rückstellkräfte vorwiegend gravitativ sind. Ihre Beobachtung würde Information über Dichteunterschiede an der Phasengrenze zwischen festem innerem und flüssigem äusserem Kern liefern.

Abb. 5 zeigt ein Dispersionsdiagramm für die Erde. Eigenfrequenzen sind als Funktion der Ordnungszahl ℓ für die verschiedenen Äste aufgetragen, die ihrerseits durch die Ordnungszahl n definiert werden. Beobachtete Moden sind speziell gekennzeichnet.

Führt man die Elliptizität und Rotation der Erde ein, so wird die Radialsymmetrie gebrochen, es liegt Axialsymmetrie um die Rotationsachse vor und die Entartung der Moden bezüglich m wird aufgehoben ($\theta = 0$ entspricht dann der Rotationsachse). Diese Komplikationen lassen sich störungstheoretisch behandeln. Der erste Effekt ist die Aufspaltung (engl. splitting) der Multipletts und für die Eigenkreisfrequenzen der Singletts gilt jetzt ($-\ell \leq m \leq \ell$):

$${}_n\omega_\ell^m = {}_n\bar{\omega}_\ell \cdot (1 + a + m \cdot b + m^2 \cdot c) \quad (7)$$

${}_n\bar{\omega}_\ell$ ist dabei die entartete Eigenfrequenz. Die Koeffizienten a , b und c sind für jedes Multiplett verschieden. Die symmetrische

Komponente $b \cdot m$ ist auf den Effekt erster Ordnung der Corioliskraft zurückzuführen, analog zum Zeemaneffekt beim Wasserstoffatom in einem Magnetfeld. Diese symmetrische Aufspaltung führt dazu, daß das Knotenbild auf der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit $b \cdot {}_n\omega_\ell$ nach Westen wandert. Die höchste Geschwindigkeit erreicht die „football“-Mode ${}_0S_2$, deren Knotenmeridiane in etwa 2.5 Tagen einmal die Erde umrunden. Die Frequenzverschiebung a und der quadratische Term in m sind hauptsächlich auf die hydrostatische Abplattung der Erde zurückzuführen. Die Koeffizienten a , b und c hängen nur schwach von der Struktur des Erdinnern ab, b vor allem von der Dichte. Die Rotationsaufspaltung überwiegt bei tiefen Frequenzen und nimmt mit $\Omega/{}_n\omega_\ell$ ab, sodass die dadurch verursachte Linienaufspaltung nur bei wenigen Moden direkt im Spektrum eines Seismogramms sichtbar wird (Abb. 2 links oben). Moden, deren radiale Eigenfunktionen im inneren Kern signifikante Werte annehmen, zeigen stark erhöhte Werte für c (sog. „anomale“ Aufspaltung, z. B. Abb. 2 rechts oben). Diese Beobachtungen können durch zylindrische Anisotropie der elastischen Eigenschaften im inneren Kern erklärt [1] werden, wobei die Rotationsachse die Symmetrierichtung ist. Diese Form der Anisotropie erklärt auch die schnellere Ausbreitung seismischer Kompressionswellen im inneren Kern parallel zur Rotationsachse gegenüber dazu senkrechten Richtungen.

Ein zweiter Effekt der Symmetriebrechung ist die Kopplung der Moden. Die obigen Formeln (1) - (5) beschreiben die Eigenfunktionen nun nur noch näherungsweise. Man unterscheidet Kopplung zwischen S - und T -Moden, Kopplung entlang eines Astes im Dispersionsdiagramm und zwischen Moden verschiedener Äste. Am leichtesten beobachtbar ist die Corioliskopplung, die

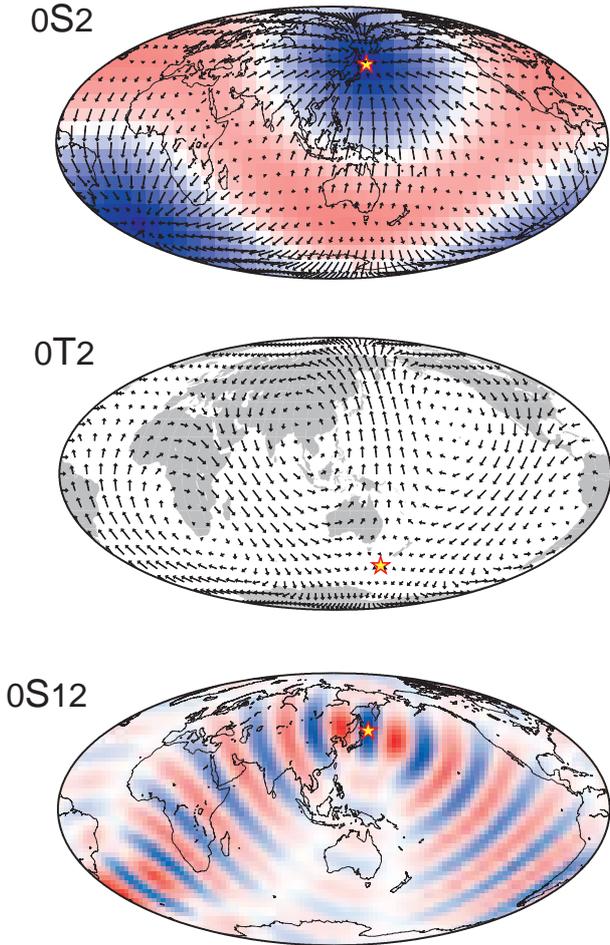


Figure 3. Schnappschüsse der Verschiebungsfelder der Multipletts ${}_0S_2$, ${}_0T_2$ und ${}_0S_{12}$ an der Erdoberfläche in Mollweide-Projektion. Die jeweiligen Erdbebenherde sind durch Sterne markiert. Die horizontalen Verschiebungen sind durch Pfeile (selbstverständlich nicht massstäblich) gegeben, die radialen Verschiebungen sind durch rote (nach aussen) und blaue Farbtöne kodiert. Für ${}_0S_{12}$ sind die Horizontalverschiebungen nicht gezeigt. Sie verhalten sich aber analog zu ${}_0S_2$.

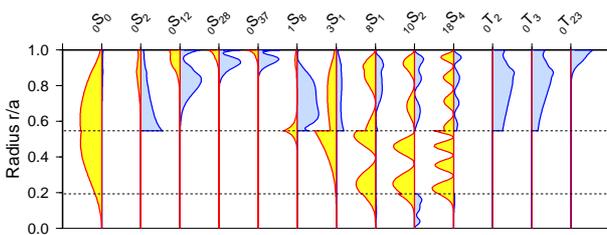


Figure 4. Radiale Verteilung der Scher- (nach rechts, blau) und Kompressionsenergiedichten (nach links, gelb) für die Moden aus Tabelle 1 über dem relativen Erdradius aufgetragen. Man erkennt neben den reinen Mantelmoden ${}_0S_\ell$, ${}_0T_\ell$, deren Eindringtiefe mit wachsendem ℓ abnimmt, auch Moden die signifikante Energiedichteanteile im äusseren (z. B. ${}_3S_1$) und inneren Kern (z. B. ${}_{10}S_2$ besitzen. Die Grenzen zwischen Mantel, äusserem und innerem Kern sind gestrichelt markiert.

Table 1. Aus seismischen Daten geschätzte Eigenfrequenzen und Gütefaktoren [3] einiger Moden mit ihren experimentellen relativen Unsicherheiten. Wenn der Hochindex m nicht angegeben ist, handelt es sich um die entartete Eigenfrequenz.

Mode	Frequenz	Unsicherheit	Q	Unsicherheit
	μHz	10^{-4}		%
${}_0S_0$	814.39	0.04	5882	6
${}_0S_2^{-2}$	299.72	5	813	24
${}_0S_2^{-1}$	304.89	14	813	24
${}_0S_2^0$	309.20	9	813	24
${}_0S_2^{+1}$	314.30	9	813	24
${}_0S_2^{+2}$	318.77	3	813	24
${}_0S_3$	468.55	3	380	12
${}_0S_9$	1577.37	1.2	357	4
${}_0S_{12}$	1988.70	1.5	352	4
${}_0S_{23}$	3170.65	0.3	259	2
${}_0S_{28}$	3634.40	0.2	217	2
${}_0S_{37}$	4440.70	0.8	186	2
${}_1S_8$	1797.76	0.6	433	11
${}_3S_1$	944.20	3.2	800	10
${}_8S_1$	2872.85	0.5	980	16
${}_{10}S_2$	4042.58	0.5	855	13
${}_{13}S_2$	4844.60	0.4	1000	5
${}_{18}S_4$	7238.25	0.3	926	6
${}_0T_2$	377.30	21	-	-
${}_0T_3$	587.60	12	-	-
${}_0T_{23}$	3109.10	2.2	139	3

zur Beobachtung von toroidalen Moden in Spektren der vertikalen Bodenverschiebung führt [4]. Die Stärke dieser Kopplung hängt hierbei wiederum von der Dichteverteilung in der Erde ab. Für alle Kopplungsmechanismen gibt es Auswahlregeln ([1], [4]), d. h. je nach der Physik des Kopplungsmechanismus gibt es Bedingungen, die die Quantenzahlen erfüllen müssen, damit Kopplung überhaupt stattfinden kann. Die Kopplung zweier Moden ist umso stärker, je näher die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Moden zusammenliegen. Deswegen sind zwischen 1.8 und 3.3 mHz die Moden ${}_0S_\ell$ und ${}_0T_{\ell+1}$ sehr stark durch die Corioliskraft miteinander gekoppelt, was man deutlich in den beobachteten Eigenfrequenzen sehen kann. Bei Kopplung zweier Moden nähern sich die Gütefaktoren und die Eigenfrequenzen entfernen sich voneinander.

Wenn die Axialsymmetrie auch noch gebrochen wird durch die Existenz von lateralen Heterogenitäten in der Struktur der Erde muß Gl. (7) durch weitere Terme ergänzt werden, die diese Eigenschaften beschreiben. Die Komplexität der Modenkopplung nimmt zu. Eine erste Näherung für Fundamentalmoden ist die sogenannte Großkreisnäherung. Diese geht von der Annahme aus, daß diejenigen Oberflächenwellen, die vom Erdbebenherd in entgegengesetzten Richtungen auf dem Großkreis zur Station und dann mehrfach um die Erde laufen, durch konstruktive Interferenz das Seismogramm und damit die Spektrallinien der Erde erzeugen. Auf einer lateral heterogenen Erde ist die über den Großkreis gemittelte Phasengeschwindigkeit je nach Lage des Großkreises verschieden, so dass die Interferenzbedingung (6) auf verschiedenen Großkreisen verschiedene Frequenzen für dasselbe Multiplett liefert. Natürlich kann jedes Singlett nur eine feste Frequenz haben, aber das un aufgelöste Multiplett ist die Summe aller Singletts und auf einem bestimmten Großkreis tragen nur die Singletts zum Multiplett bei, die

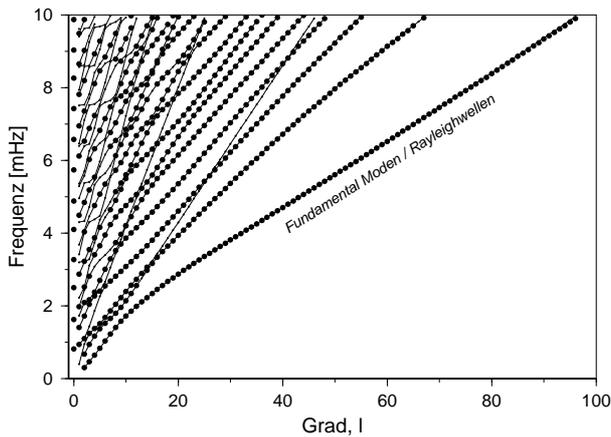


Figure 5. Dispersionsdiagramm der sphäroidalen und radialen Eigenschwingungen für ein realistisches 1-D Erdmodell. Die Moden sind durch diskrete Punkte gegeben, die sich auf Ästen anordnen. Die dicken Kreise gehören zu beobachteten, dünne zu noch nicht beobachteten Moden. Die komplexere Struktur der Äste links oben wird durch den Erdkern verursacht. Für toroidale Moden gibt es ein äquivalentes, links oben etwas einfacheres Diagramm, da der flüssige Erdkern keine Scherdeformationen unterstützt.

Gl. (6) erfüllen. Alle anderen Singletts interferieren destruktiv. Es kann theoretisch gezeigt werden, daß das Spektrum eines Multipletts in glatten Strukturen aussieht wie dasjenige eines Singletts mit verschobener Eigenfrequenz und veränderter Dämpfung [1]. Masters et al. [5] haben diese Eigenschaft 1982 dazu benutzt, um das allererste lateral heterogene globale Erdmodell zu erstellen. Dabei spielen nur laterale Heterogenitäten eine Rolle, die durch Kugelfunktionen geraden Grades beschrieben werden können. Dies liegt daran, daß die scheinbaren Eigenschaften eines Multipletts nicht davon abhängen, in welcher Richtung auf dem Großkreis die Station vom Herd aus gesehen liegt. Dies ist eine wichtige Einschränkung bei der Inversion der Beobachtungen für Erdstruktur.

Man kann den Einfluss der lateralen Variationen der Struktur der Erde auf die Aufspaltung der Multipletts mit sogenannten Strukturkoeffizienten c_s^t beschreiben [1]. Für jeden Grad s und Ordnung t einer Kugelfunktion sind dies radiale Integrale aller strukturellen Abweichungen vom ungestörten Erdmodell, wobei sie linear von den Störungen abhängen. Für jedes Multiplett kann man dann die sogenannte Aufspaltungsfunktion $\sigma(\theta, \phi)$ an der Erdoberfläche darstellen, indem man die Summe über alle geraden s und alle t ($-s \leq t \leq +s$) des Produkts aus Strukturkoeffizienten und zugehörigen Kugelfunktionen bildet. σ gibt an jedem Punkt an, um wieviel die Eigenfrequenz des Multipletts gegenüber dem kugelsymmetrischen Referenzmodell verschoben wäre, wenn die radiale Struktur unter diesem Punkt in der ganzen Erde vorliegen würde.

Wenn Erdbeben, Instrumente, Rotation und Elliptizität bekannt sind, kann man durch iterativen Vergleich synthetischer mit beobachteten Multipletts die Strukturkoeffizienten und damit die Aufspaltungsfunktion ermitteln. Laske und Masters [6] wiesen nach, daß sich diese Aufspaltungsfunktionen für Multipletts, die den inneren Erdkern „spüren“ in 20 Jahren nicht signifikant geändert haben und daß damit die behauptete Superrotation ($1.0^\circ/a$) des inneren Kerns gegenüber dem Erdmantel höchstens $0.3^\circ/a$ betragen kann, aber wahrscheinlich viel näher bei null liegt. Die Strukturkoeffizienten erlauben eine Inversion der 3-D Struktur der Erde, allerdings mit der Beschränkung auf gerade Kugel-

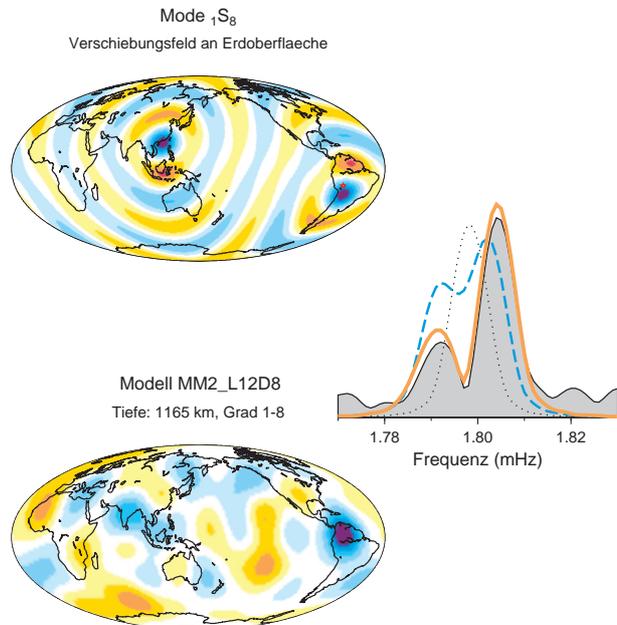


Figure 6. Eigenschaften der Mode $1S_8$. Links oben ist das radiale Verschiebungsfeld des gesamten Multipletts (17 Singletts) nach dem Beben von Abb. 1 (Stern) dargestellt. Warme (kalte) Farbtöne entsprechen Verschiebungen nach aussen (innen). Im Bild rechts ist das beobachtete Amplitudenspektrum an der Station MAJO (Matsushiro, Japan, schwarze Linie) für diese Mode zusammen mit theoretischen Linienformen dargestellt: das gepunktete Spektrum würde man auf einer kugelsymmetrischen, nicht rotierenden Erde erhalten, die blaue gestrichelte Linienform erhält man nach Einführung der Rotation und Elliptizität der Erde, die braune dicke Linie ergibt sich bei Berücksichtigung der lateralen Variationen der Scherwellengeschwindigkeit ($v_s = \sqrt{\mu/\rho}$) des Erdmantels, wie sie z. B. in einer Tiefe von 1165 km im Bild links unten dargestellt ist.

funktionen. Abb. 6 zeigt für die Mode $1S_8$ neben einem Schnappschuss des Verschiebungsfeldes die sukzessive Annäherung synthetischer Spektren an ein beobachtetes Spektrum durch die theoretische Berücksichtigung der Symmetriebrechung. Aus Eigenschwingungen ermittelte Heterogenitäten der Erde sind in Abb. 6 unten in lateraler Richtung dargestellt. In Abb. 7 ist ein radialer Schnitt gezeigt, für den neben Eigenschwingungen auch Laufzeitresiduen von seismischen Raumwellen verwendet wurden [7].

Bisher wurden nur Erdbeben als Anregungsmechanismus für Eigenschwingungen der Erde erwähnt. Die Herdvorgänge sind sehr kurz im Vergleich zu den Abklingzeiten der Moden, damit können die Moden frei schwingen bis sie im Rauschen verschwinden. Widmer und Zürn [8] u. a. haben 1991 beobachtet, daß beim Ausbruch des Vulkans Mount Pinatubo auf den Philippinen ca. 8 Stunden lang bichromatische Rayleighwellen erzeugt wurden, die mehrfach um die Erde liefen und damit konstruktiv interferieren konnten (${}_oS_{28}$ und ${}_oS_{37}$). 1998 haben japanische Seismologen entdeckt, daß im Hintergrundrauschen zwischen 2 und 7 mHz alle sphäroidalen Fundamentalmoden ${}_oS_\ell$ mit Amplituden von höchstens 10 pm/s^2 ($10^{-12}g$) dauernd angeregt sind. Man kann dies an guten Stationen statistisch nachweisen (z. B. [9]). Im Vergleich dazu sind die Anfangsamplituden bei starken Erdbeben und die Schwingungsweiten beim Mount Pinatubo um etwa den Faktor 1000 grösser. Sowohl beim Vulkan als auch bei den Hintergrundschwingungen werden Druckschwankungen der Atmosphäre (im ersten Fall lokal, im zweiten global) als Anregungsmechanismus favorisiert.

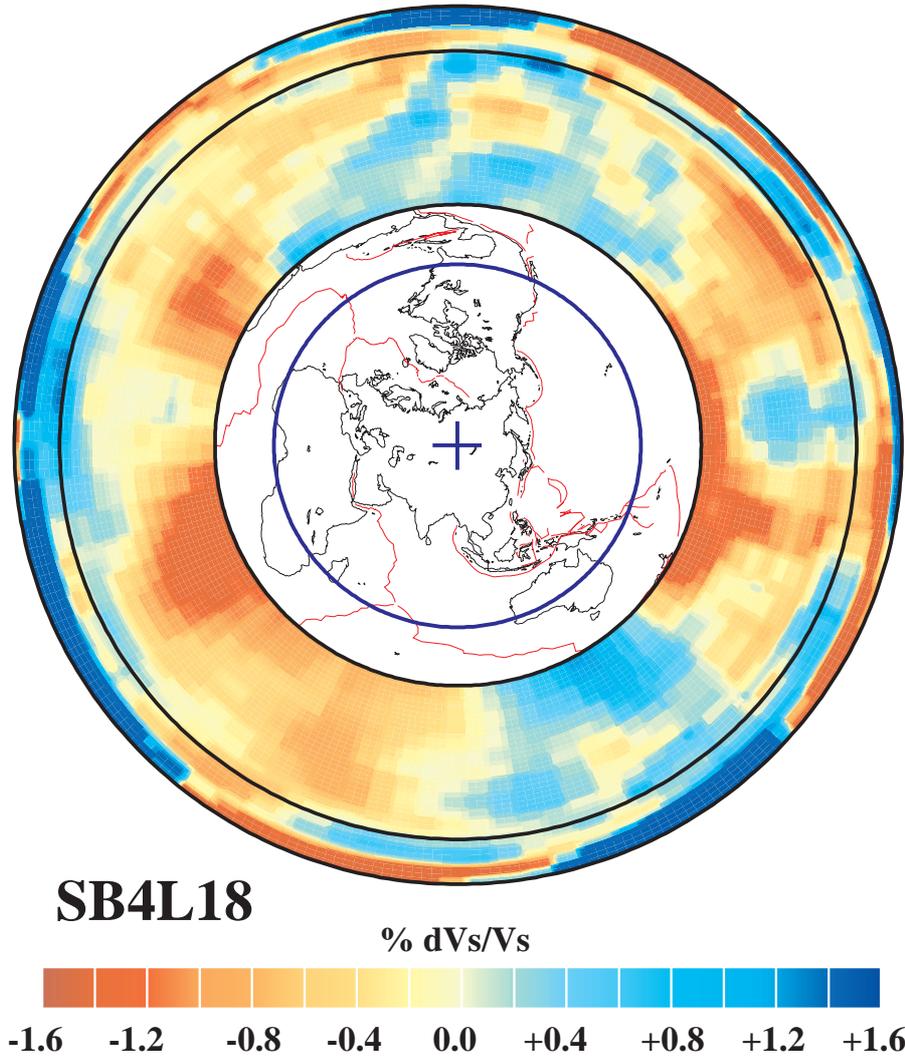


Figure 7. Schnitt durch ein modernes Modell des Erdmantels, wie es aus Laufzeitresiduen seismischer Raumwellen und den Aufpaltungsfunktionen von Eigenschwingungen invertiert worden ist [7]. Dargestellt sind wiederum Perturbationen in der Scherwellengeschwindigkeit relativ zu einem 1-D Geschwindigkeitsmodell. Die Orientierung des Schnitts und der Anomalien im Modell ist aus der Lage der blauen Linie auf der eingesetzten Weltkarte zu ersehen. Die schwarze Linie im Modell verläuft bei einer Tiefe von 660 km.

3 KREISELEIGENSCHWINGUNGEN

Zusätzlich zu ihren durch äussere Kräfte und Drehmomente bedingten Bewegungen kann die Erde noch überlagerte freie Bewegungen ausführen, die denen eines kräftefreien, abgeplatteten Kreisels entsprechen. Im System, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert gilt der Drehimpulssatz:

$$\dot{\mathbf{H}} + \omega \times \mathbf{H} = \mathbf{L} \quad (8)$$

wobei \mathbf{H} der Drehimpulsvektor, \mathbf{L} der äussere Drehmomentenvektor sind und \times das Vektorkreuzprodukt bezeichnen. Wenn \mathbf{I} der Trägheitstensor des starren Körpers ist, ist $\mathbf{H} = \mathbf{I} \cdot \omega$. Ist der Kreisel deformierbar, kann dies mit einem Zusatzdrehmoment \mathbf{h} (z. B. [10]) beschrieben werden und man erhält die Liouville-Gleichungen des deformierbaren Kreisels:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \omega + \mathbf{h}) + \omega \times (\mathbf{I} \cdot \omega + \mathbf{h}) = \mathbf{L} \quad (9)$$

Man kann diese Gleichungen nun separat für Mantel und flüssigen Erdkern (fester innerer Kern zunächst vernachlässigt) ansetzen,

muß dann aber die Drehmomente \mathbf{N} in die Gleichungen einführen, die Kern und Mantel aufeinander ausüben.

$$\dot{\mathbf{H}}^c + \omega \times \mathbf{H}^c = \mathbf{L}^c + \mathbf{N} \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^m + \omega \times \mathbf{H}^m = \mathbf{L}^m - \mathbf{N} \quad (11)$$

Die Hochindizes c und m bezeichnen die entsprechenden Vektoren für Kern und Mantel. \mathbf{N} ist die Summe aller Wechselwirkungen (topographisch, elektromagnetisch, gravitativ, viskos) zwischen Mantel und Kern: als wichtigste wird die sog. Druck- oder Trägheitskopplung angesehen. Deren Rückstellmomente entstehen dann, wenn Kern und Mantel nicht um dieselbe Achse rotieren und die entscheidende Grösse ist dabei die Elliptizität der Kern-Mantel-Grenze. Setzt man nun die entsprechenden Grössen ein und $\mathbf{L}^c = \mathbf{L}^m = 0$, so erhält man zwei Lösungen für die äquatorialen Komponenten σ der kleinen Abweichungen der Mantelrotation von der Figurenachs.

$$\sigma_{cw} = \frac{A}{A^m} \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{k}{k_s}\right) \cdot \Omega \quad (12)$$

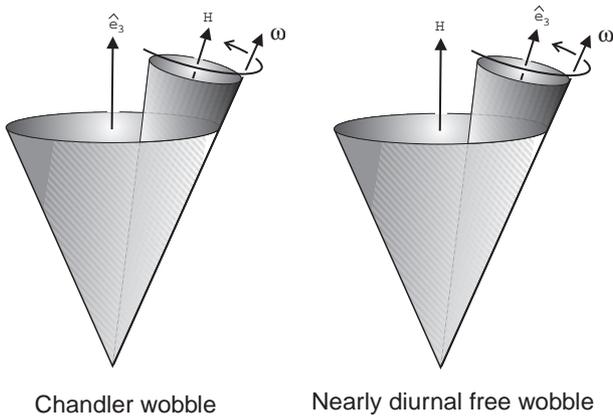


Figure 8. Poincaré-Darstellung der beiden Kreisel-Eigenschwingungen der Erde. H ist die Drehimpulsachse (Achse des raumfesten Kegels), \hat{e}_3 ist die Figurenachsachse (Achse des körperfesten Kegels) und ω die momentane Rotationsachse. Beim Chandler Wobble ist die Bewegung prograd, d. h. im selben Drehsinn wie die Erdrotation selbst, beim Nearly Diurnal Free Wobble retrograd. Die Öffnungswinkel der inneren Kegel in beiden Fällen sind hier stark übertrieben gezeichnet, das wirkliche Verhältnis ist etwa 1:400.

und

$$\sigma_{ndfw} = -\Omega \cdot \left(1 + \frac{A}{A^m}(\alpha^c - \beta)\right) \quad (13)$$

wobei $\alpha = (C - A)/A$ und $\alpha^c = (C^c - A^c)/A^c$ die dynamischen Elliptizitäten von Erde und Kern sind und das Minus für eine retrograde Bewegung steht. A , A^c und A^m sind die äquatorialen; C , C^c und C^m die polaren Trägheitsmomente [11] von ganzer Erde, Kern und Mantel, Ω ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde. Die erste der Rotationseigenschwingungen ist der berühmte Chandler Wobble. Wobble (engl.) bezeichnet die Rotation der momentanen Drehachse um die Figurenachsachse, im Deutschen findet man die weniger anschauliche Bezeichnung Breitenschwankung. Die zweite wird als „Nearly Diurnal Free Wobble“ oder als freie Kern-Nutation bezeichnet. Die Größen k/k_s und β in den beiden Ausdrücken geben an, um wieviel die dynamischen Elliptizitäten durch die sofortige elastische Reaktion auf die Zentrifugalkräfte bzw. Druckkräfte an der Kern-Mantel-Grenze reduziert werden. Dadurch wird die Eigenperiode erheblich verlängert. Die Kreiseltheorie zeigt, daß ein Wobble immer mit einer Rotation der momentanen Drehachse um die raumfeste Drehimpulsachse verknüpft ist, einer Nutation oder freien Präzession mit der Periode T_N . Es gilt:

$$\sigma_{wobble} = \frac{2 \cdot \pi}{T_N} - \Omega \quad (14)$$

Abb. 8 zeigt beide Wobbles in einer Poincaré-Darstellung: der körperfeste Kegel (Achse = Figurenachsachse) rollt reibungslos auf dem raumfesten Kegel (Achse = Drehimpulsachse) ab. Die Berührungslinie der beiden Kegel ist die momentane Rotationsachse. Drehimpuls, momentane Rotationsachse und Figurenachsachse bleiben immer in einer Ebene.

Der Chandler Wobble wurde als Breitenschwankung mit einer Periode von 435 Sterntagen schon 1891 astronomisch entdeckt. Die momentane Rotationsachse bewegt sich an den Polen der Erde zyklisch innerhalb eines Kreises mit 10 m Radius, diese Bewegung setzt sich zusammen aus dem Chandler Wobble und dem etwas stärkeren, von der Atmosphäre erzwungenen Jahreswobble. Die Amplituden der mit dem Chandler Wobble assoziierten Nutation ist etwa um den Faktor 400 kleiner (z. B. [13]). Man hatte allerdings für die starre Erde die Periode dieser Kreiseleigenschwin-

gung zu 305 Sterntagen vorhergesagt ($2 \cdot \pi / T_{cw} = \alpha \cdot \Omega$). Ein Anteil des Äquatorwulstes besteht jedoch aus der momentanen Reaktion der elastischen Erde auf die Fliehkraft und dieser Anteil trägt damit nicht zum „Rückstellmoment“ bei. Dies führt über die Konstante k/k_s zu einer Periodenverlängerung. Andererseits ist der flüssige Erdkern nur schwach an den Mantel gekoppelt und nimmt am Wobble nicht teil, dies verkürzt die Periode wieder mittels des Faktors A/A_m . Mit realistischen Zahlen führt dies auf eine Periode von 397 Sterntagen. Es kommen [12] zwei weitere Periodenverlängerungen hinzu: 29.8 Sterntage durch die momentane Einstellung der Ozeanoberfläche auf die Fliehkräfte und 8.5 Sterntage durch die Relaxation der Elastizität des Mantels gegenüber seismischen Frequenzen (Anelastizität). Damit ist die Periode des Chandler Wobble im Prinzip verstanden, wobei die letzten beiden Terme noch etwas voraussetzungsbehaftet sind. Der Chandler Wobble hat einen Gütefaktor unter 100, als dissipative Prozesse kommen Anelastizität im Erdmantel, viskose Reibung, elektromagnetische und topographische Kopplung an der Kern-Mantel-Grenze, sowie Reibung in den Ozeanen, falls die zum Chandler Wobble gehörende Poltide keine Gleichgewichtstide ist (den Fliehkräften also sofort und vollständig folgt), in Frage. Smith und Dahlen [12] erklären den beobachteten Wert mit der Mantel- und Kernelastizität, aber mit stärkerer Unsicherheit als bei der Deutung der Periode. Die komplexe Frequenz des Chandler Wobble ist eine sehr wichtige Beobachtung zur Ermittlung der Frequenzabhängigkeit der Elastizität des Erdmantels (Rheologie).

Der Chandler Wobble ist dauernd angeregt, wobei als Energiequellen die Atmosphäre, die Ozeane und Erdbeben (Veränderungen der Trägheitsmomente) diskutiert werden. Die Atmosphäre scheint nur etwa ein Drittel der nötigen Energie liefern zu können, Erdbeben sind nicht sicher als Quellen identifiziert worden. Gross [14] behauptet, die restlichen zwei Drittel in den Ozeanen gefunden zu haben, die ihrerseits die Atmosphäre zum Antrieb brauchen. Heute wird die Orientierung der Erdachse im Raum vom Erdrotationsdienst kontinuierlich mit Methoden wie Radiointerferometrie mit langer Basis (VLBI), Laser-Entfernungsmessungen zum Mond (LLR) und zu Satelliten (SLR), sowie GPS, mit hoher Präzision gemessen. Supraleitende Gravimeter sind heute in der Lage, die mit den Wobbles assoziierten Änderungen der lokalen Fliehkraft von etwa $40 - 80 \text{ nm/s}^2$ im Jahres- und 14-Monats-Rhythmus aufzulösen (Abb. 9). Etwa 16 % dieses Effekts sind auf die elastische Deformation der Erde durch die Fliehkräfte zurückzuführen. Eine genaue Messung dieses Anteils beim Chandler Wobble würde einen neuen Eckwert für die Mantelrheologie liefern, da die elastischen Konstanten gegenüber denen bei den mehr als vier Größenordnungen höheren seismischen Frequenzen dadurch relaxiert sind.

Die freie Kern-Nutation ist eine retrograde Bewegung der momentanen Rotationsachse um den Drehimpulsvektor. Die Amplitude der Nutation ist etwa 400 mal so groß wie die des NDFW. Die Schwingung wird auf zwei Arten beobachtet. Zunächst ist die Nutation selbst mit VLBI beobachtet worden mit einer Amplitude von 0.84 nrad . Sie ist ebenfalls zeitabhängig und es ist genügend Energie in der Atmosphäre vorhanden, um diese Amplitude zu erzeugen. Die zweite Methode ist indirekt: man beobachtet die resonante Reaktion der Erde auf Drehmomente mit Frequenzen in der Nähe der Resonanz. Diese Drehmomente werden durch die ganztägigen (tesseralen) Erdzeitenkräfte [z. B. 13] erzeugt, deren angreifende Amplituden sehr genau bekannt sind. Die Reaktion der Erde wird mit Gravimetern und Extensometern gemessen und aus der Frequenzabhängigkeit dieser Reaktion können die Eigenschaften der Resonanz (komplexe Eigenfrequenz, komplexe Admittanz) ermittelt werden (Abb. 10). Dasselbe gilt für VLBI-Beobachtungen der

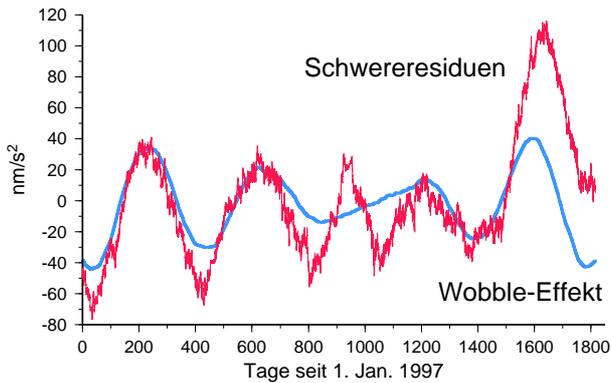


Figure 9. Aus der mit raumgeodätischen Methoden ermittelten Polbewegung berechnete Zentrifugalkraft-Änderungen in Strasbourg (blau) verglichen mit der Registrierung des dortigen supraleitenden Gravimeters (rot). Von letzterer sind die bekannten Erdzeiten sowie atmosphärische und hydrologische Effekte subtrahiert worden sind. Die genaue Erfassung dieser Zentrifugalkraft-Änderungen stellt immer noch eine experimentelle Herausforderung dar.

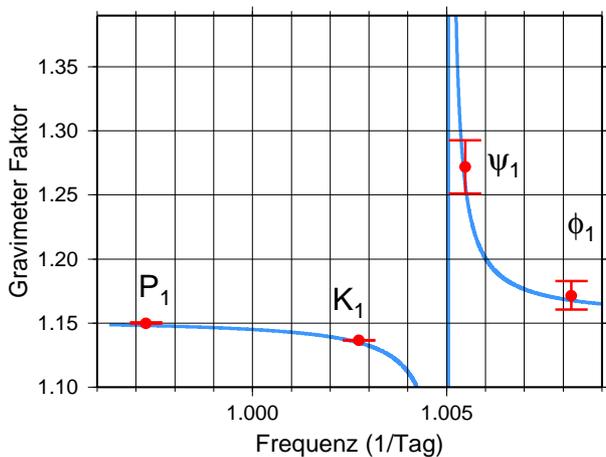


Figure 10. Durch den NDFW verursachte Resonanz im ganztägigen Gezeitenband. Gemessene und anschliessend für die Wirkung der ozeanischen Gezeiten korrigierte Gravimeterfaktoren (=Verstärkung der Erdgezeiten-schwere durch die Elastizität der Erde) für die Gezeitenwellen P_1 , K_1 , ψ_1 und ϕ_1 . Unterlegt ist die Modellkurve für die Parameter $T_{FCN} = 432$ Sterntage, $Q_{FCN} = 3 \cdot 10^4$, Verstärkungsfaktor $A = -(3.5 + i) \cdot 10^{-3}$. Die zugrundeliegende Gezeitenregistrierung von 1996 bis 2000 wurde mit einem supraleitenden Gravimeter bei Strasbourg erstellt.

erzwungenen Nutationen, die mit den Erdzeiten eng assoziiert sind.

Es ist abgeschätzt worden, daß alle weiter oben angeführten Kopplungsmechanismen gegenüber der Trägheits- oder Druckkopplung an der Kern-Mantel-Grenze vernachlässigbar sind. Letztere wird durch die dynamische Elliptizität α^c an der Kern-Mantel-Grenze beschrieben. Die Grösse β gibt an, welcher Anteil von α^c momentan auf die Druckkräfte reagiert und damit die „Rückstellmomente“ verringert, dies sind etwa 25 %. Anders als beim Chandler Wobble ist die beobachtete Periode von 432 Sterntagen kürzer als die für ein hydrostatisch auf die Rotation reagierendes seismologisches Erdmodell von 466 Sterntagen. Führt man Anelastizität im Erdmantel ein, wird die Diskrepanz noch grösser. Diese wird z. Zt. damit erklärt, daß die Kern-Mantel-Grenze um ca. 5 % (entsprechend 300 - 500 m) stärker abgeplattet ist als hydrostatisch

(1/400) erwartet wird. Derart kleine Perturbationen in der Topographie der Kern-Mantel Grenze lassen sich mit seismologischen Methoden nicht erreichen. Der Gütefaktor des NDFW beträgt etwa 20000, eine frühere Diskrepanz zwischen Gezeiten- und Nutationsresultaten scheint mit verbesserten Gezeitengravimetern zu verschwinden. Mantel- und Kernelastizität alleine liefert höhere Güte, d. h. ein noch nicht identifizierter Dämpfungsmechanismus ist am Werk. Seismologen untersuchen in den letzten Jahren verstärkt die Mantelschicht direkt oberhalb der Kern-Mantel-Grenze, die sehr heterogen und sogar anisotrop zu sein scheint. Die Eigenschaften dieser Schicht sind sehr wichtig für den NDFW. Auch die Admittanz der Erde für den NDFW kann in Zukunft Eckwerte für diese Schicht liefern.

In den Gleichungen (10 - 13) ist die Existenz des festen inneren Kerns nicht berücksichtigt. Führt man diesen zusätzlich ein, muß das Gleichungssystem (10, 11) entsprechend modifiziert werden. Es ergeben sich dann zwei weitere Eigenschwingungen, die aber bisher nicht beobachtet werden konnten: ein Wobble des inneren Kerns mit sehr niedriger Frequenz und die freie Nutation des inneren Kerns. Der mit letzterer assoziierte Wobble hat seine Eigenfrequenz wie der NDFW im ganztägigen Gezeitenband, besitzt aber nur geringen Einfluß auf die Gezeitenantwort (z. B. [15]). Für unsere Kenntnis des tiefsten Erdinneren wäre ihre Beobachtung jedoch von Bedeutung.

4 DANK

Wir bedanken uns bei Bettina Bayer, Jacques Hinderer, Gabi Laske, Joe Resovsky und Séverine Rosat für Material zu den Abbildungen.

Literatur

- 1 F. A. Dahlen und J. Tromp, Theoretical Global Seismology, Princeton University Press, Princeton 1998.
- 2 G. Müller und W. Zürn, Landolt-Börnstein, Neue Serie V/2a, Springer Verlag, Berlin 1984.
- 3 T. G. Masters und R. Widmer, Free Oscillations: Frequencies and Attenuation. In T. J. Ahrens, (Hrsg.), Global Earth Physics: a handbook of physical constants, Am. Geophysical Union, Washington (1995).
- 4 W. Zürn et al., Geophys. J. Int. **113**, 113 (2000).
- 5 G. Masters et al., Nature **298**, 609, (1982).
- 6 G. Laske und G. Masters, Nature **402**, 66 (1999).
- 7 Masters et al., The Relative Behavior of Shear Velocity, Bulk Sound Speed, and Compressional Velocity in the Mantle: Implications for Chemical and Thermal Structure. In S. Karato et al., (Hrsg.), Monograph 117, AGU, Washington (2000).
- 8 R. Widmer und W. Zürn, Geophys. Res. Lett. **19**, 765 (1992).
- 9 K. Nishida und N. Kobayashi, J. geophys. Res. **104**, 28741 (1999).
- 10 K. Lambeck, Geophysical Geodesy: The Slow Deformations of the Earth, Clarendon Press, Oxford 1988
- 11 C. F. Yoder, Astrometric and Geodetic Properties of Earth and the Solar System. In T. J. Ahrens, (Hrsg.), Global Earth Physics: a handbook of physical constants, Am. Geophysical Union, Washington (1995).
- 12 M. L. Smith und F. A. Dahlen, Geophys. J. R. astr. Soc. **64**, 223 (1981)
- 13 W. Zürn, The Nearly-Diurnal Free Wobble Resonance. In H. Wilhelm et al., (Hrsg.), Lecture Notes in Earth Sciences 66, Springer-Verlag, Heidelberg (1997).
- 14 R. Gross, Geophys. Res. Lett. **27**, 2329 (2000).
- 15 D. De Vries und J. M. Wahr, J. geophys. Res. **96**, 8275 (1991)